Série N^{o}4 : Intégration et dérivation numériques

Exercice 1 *(Interpolation et intégration)*
Soient $t_1, \ldots, t_m$, m points distincts de $[-1,1]$. Pour une fonction f continue sur $[-1,1]$, on désigne par $p \in \mathbb{P}_{m-1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f en les points t_i.

1. Montrer que si nous construisons la quadrature élémentaire $J(f) = \int_{-1}^{1} p(t)dt$ alors
$$J(f) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(t_i);$$
préciser les α_i en utilisant la base de Lagrange.
2. Montrer que la méthodes est d'ordre au moins $m-1$.
3. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^m([-1,1])$, alors
$$\mathcal{E}(f) = \left| J(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt \right| \leq \frac{1}{m!} \max_{t\in[-1,1]} |f^{(m)}(t)| \int_{-1}^{1} |\Pi_m(t)|dt$$
avec $\Pi_m(t) = \prod_{i=1}^{m}(t-t_i)$.

Exercice 2 *(Majoration et erreur réelle)*
Déterminer un entier n pour que la méthode des trapèze à pas constant donne une erreur inférieure à 10^{-10} dans l'approximation de $\int_0^1 t^4 dt$.
Même question pour la méthode de Simpson.

Exercice 3 *(Équation intégrale)*
On souhaite déterminer une approximation v de la solution u de l'équation intégrale :
$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt + f(x), \quad x \in [a,b]$$
où a et b sont donnés ainsi que les fonctions K et f. La fonction K est appelée **noyau**.
L'équation de Love en électrostatique est
$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+(x-t)^2} u(t)dt + 1.$$
Le calcul approché de l'intégrale se fait par une méthode des trapèze. À partir d'un entier N, on construit une subdivision régulière de $[a,b]$ en définissant $h = (b-a)/N$ et $x_i = a + (i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, N+1$. Ainsi
$$\int_a^b \varphi(t)dt \approx \frac{h}{2}\left(\varphi(x_1) + 2\sum_{j=2}^{N} \varphi(x_j) + \varphi(x_{N+1})\right),$$

si bien que pour chaque i, l'équation du problème approché s'écrit :

$$v_i = \frac{h}{2}\left(K(x_i, x_1)v_1 + 2\sum_{j=2}^{N} K(x_i, x_j)v_j + K(x_i, x_{N+1})v_{N+1}\right) + f(x_i)$$

où v_j est l'approximation de $u(x_j)$, ce qui conduit au problème approché :

$$\left(I_{N+1} - \frac{h}{2}A_N\right)V = F$$

où $I_{N+1} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ est la matrice identité, $F = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{N+1}))^T$ est le vecteur de données.

1. Déterminer la matrice A_N.
2. Dans le cas de l'équation de Love, déterminer le système linéaire à résoudre. Traiter le cas $N = 2$.
3. **Exemple** : On se limite au cas où $K(x,t) = k(x-t)$. Prendre $k(t) = t^2$ et $f(t) = \sin(\pi t) + \frac{4t}{\pi}$. Traiter le cas $N = 2$.

Exercice 4 *(Quadrature élémentaire sur $[a,b]$)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On cherche des valeurs approchées de $I = \int_a^b f(t)dt$. Une approximation est donnée par la méthode des trapèzes :

$$I_{app} = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)).$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, alors $I = I_{app} - \int_a^b f'(t)\left(t - \frac{(b+a)}{2}\right)dt$.
2. Montrer que $J = \int_a^b f'(\frac{(b+a)}{2})\left(t - \frac{(b+a)}{2}\right)dt = 0$. Puis en calculant $I - J$, en déduire que pour $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, lerreur vérifie :

$$e = |I - I_{app}| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \sup_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)|.$$

Exercice 5

La méthode d'intégration numérique dite de Gauss-Hermite permet de calculer les intégrales de type : $I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-t^2}dt$. La formule de quadrature associée s'écrit sous la forme suivante $I(f) = \sum_{\ell=0}^{m} \alpha_\ell f(\omega_\ell)$ où les $\alpha_\ell = \frac{2^m m!\sqrt{\pi}}{(m+1)[H_m(\omega_\ell)]^2}$ et ω_ℓ sont les racines du polynôme d'Hermite H_{m+1} de degré $m+1$ définie par la suite récurrente suivante : $H_0(\omega) = 1$, $H_1(\omega) = 2\omega$ et

$$H_{m+1}(\omega) = 2\omega H_m(\omega) - 2mH_{m-1}(\omega), \quad \forall m \geq 1.$$

1. Calculer $H_2(\omega)$, $H_3(\omega)$ et $H_4(\omega)$, puis montrer que $H_4'(\omega) = 8H_3(\omega)$.
2. Montrer par récurence que $H_m'(\omega) = 2mH_{m-1}(\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ et tout $m \geq 1$.
3. Pour $m = 1$, trouver les racines de H_2, puis trouver α_0 et α_1 et en déduire l'expression de la quadrature $I(f)$.
4. Pour $m = 2$, trouver les racines de H_3, puis trouver α_0, α_1 et α_2 et en déduire l'expression de la quadrature $I(f)$.
5. En utlisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ lorsque $f(t) = 1$, prouver l'exactitude de la formule de quadrature $I(f)$.